Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Probeklausur

Diese Probeklausur dient als eine Vorbereitung auf die Klausur, die am **6. September 2019 um 10 Uhr im Rundbau** stattfindet. Es sind **keine Hilfsmittel erlaubt**. Die Bearbeitungszeit ist **150 Minuten**.

Mögliche Klausuraufgaben

Eine von diesen Aufgaben wird auch in der Klausur stehen.

1. Für die folgenden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) berechnen Sie deren Determinanten,

(b) bestimmen Sie, ob sie invertierbar sind,

(c) berechnen Sie ggf. deren Inverse.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie für alle Werte von a die Eigenwerte und Eigenräume.

(b) Ist A für alle a diagonalisierbar? Wenn ja, welcher Diagonalmatrix ist sie ähnlich?

(c) Ist A orthogonal?

3. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := y^4 - 3xy^2 + x^3.$$

(a) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extrema, d. h. bestimmen Sie deren Art, Position und Wert von f.

(b) Besitzt f ein globales Minimum und Maximum?

(c) Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom von f um $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

4. Es sei

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq y \geq 0, xy \geq 1, y \geq x\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge M.

(b) Bestimmen Sie deren Flächeninhalt.

(c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_M \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy$.

Zusätzliche Aufgaben

Unten finden Sie weitere Aufgaben für die Vorbereitung.

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in der Matrixform $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ um.

(b) Bestimmen Sie Kern von A, dessen Dimension und Rang von A.

(c) Lösen Sie das obige System, d. h. bestimmen Sie seine allgemeine Lösung.

2. Es seien

- $\underline{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$,
- $\underline{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$,
- $\underline{C} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Welche der obigen Tupel sind Basen von $\mathbb{R}^3$?

(b) Es seien

$$\boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

in der Standardbasis gegeben. Bestimmen Sie deren Darstellungen in allen Tupeln, die Basen sind.

3. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 \sin z \\ 2xy \sin z \\ xy^2 \cos z + z \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie dessen Jacobi-Matrix, Divergenz und Rotation (in beliebigem Punkt).

(b) Ist $\boldsymbol{F}$ ein Gradientenfeld? Wenn ja, bestimmen Sie sein Potential.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, wobei $\boldsymbol{\gamma}$ die Strecke von $(1, 0, 0)$ bis $(0, 1, 1)$ ist.

4. Wir betrachten die Fläche $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 25, \ z \geq 4\}$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche.

(b) Sei

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

$$\int_M \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

einmal mit der Definition des Flusses und einmal mit dem Satz von Stokes.

5. Es sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2(x+1) \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{F}$ durch die Fläche

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z-1)^2, \ z \in [0, 1]\},$$

indem Sie

(a) ihn nach der Definition ausrechnen,

(b) den Satz von Gauß anwenden.

Zur Erinnerung: Ist $\boldsymbol{F} : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subset \mathbb{R}^3$ offen ein Vektorfeld und $M \subset U$ eine Fläche, so heißt

$$\int_M \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Fluss von $\boldsymbol{F}$ durch M. Dabei ist $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \ dS$, wobei dS das Oberflächenelement und $\boldsymbol{n}$ die Normale auf M ist.